Corrigé du devoirs

Une sphère diélectrique uniformément polarisée

1. On a div $\vec{P}$ Montrer que les densités de charge surfacique σ_P et volumique ρ_P de polarisation satisfont :

ρ_P=- div $\vec{P}$ =0 car P uniforme

$\sigma_P = \vec{P} . \vec{n}$

Ici, en cordonnées sphériques, $\vec{n} = \vec{u}_r$ orienté vers l'exterieur de la sphère en tout point, donc puisque $\vec{P} = P_0 \vec{u}_z$, on a $\sigma_P = \vec{P} . \vec{n} = P_0 \cos\theta$.

2. On cherche à calculer le champ $\mathbf{E}_d$ en O dû aux charges de polarisation σ_P en fonction de $\vec{P}$. *On se place en coordonnées sphériques.*

Le champ dû à un élément de surface dS de la sphère s'écrit $d\vec{S} = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \ \vec{u}_r$

Il porte une charge σ_PdS et crèe au centre de la sphère un champ, par Coulomb,

$d\vec{E} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{u_r} = -\frac{\sigma_P dS}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{u_r}$ orienté depuis la charge vers le centre de la sphère donc selon $-\vec{u}_r$.

Par symétrie, le champ résultant final sera entièrement selon l'axe z. En effet, tout élement de surface dS et son symétrique par rapport à Oz crèent des champs identiques selon z mais opposés selon x et y donc leur somme est nécessairement selon Oz. On peut donc ne retenir de $d\vec{E}$ que sa composante selon Oz, à savoir $dE_z = dE\cos\theta$. Le champ résultant total en O est alors :

$$\vec{E}(O) = \iint_{surface\_sphère} dE_Z \vec{u_z}$$

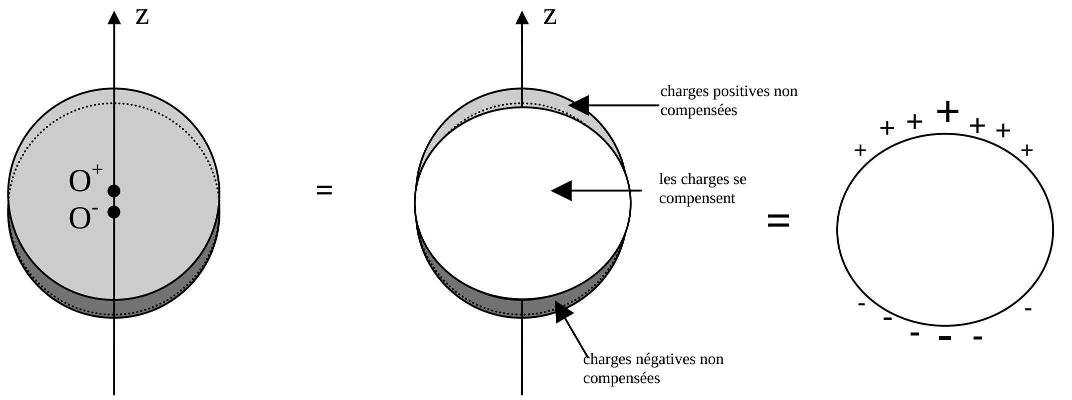
$$= \iint_{surface\_sphère} -\frac{\cos\theta\sigma_P dS}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{u_z}$$

$$= \iint_{surface\_sphère} \int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} -\frac{\cos\theta P\cos\theta R^2 \sin\theta d\theta d\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{u_z}$$

$$= -\frac{P2\pi}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\theta=0}^{\theta=\pi} \cos^2\theta\sin\theta d\theta \vec{u_z} = -\frac{P}{2\varepsilon_0}\frac{2}{3}\vec{u_z} = -\frac{P}{3\varepsilon_0}\vec{u_z}$$

Donc la sphère polarisée induit un champ en son centre qui s'oppose au champ extérieur, puisqu'il est selon $-\vec{u}_z$. C'est le champ dépolarisant déjà évoqué dans le problème des condensateurs en TD. Le champ final dans le diélectrique est donc plus faible que le champ exterieur du départ.

3. D'un point de vue des charges électriques, les deux sphères pleines superposées reviennent graphiquement à :



Par Gauss, la sphère S^+ crée en son centre O^+ un champ satisfaisant $\oiint \vec{E}\,\overrightarrow{dS} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$

On prend une sphère de centre O^+ de rayon r. D'où l'application de Gauss et les symétries du problème mène au champ en tout point M de la syrface de cette sphère :

$E^+(M)4\pi r^2 = \frac{\rho\frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0}$ où r = O^+M

et E^+ est dirigé selon $\overrightarrow{O^+M}$ (de l'interieur vers l'exterieur radial).

D'où $\vec{E}^+(M) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O^+M}$

De même, le champ créé par la sphère chargée négativement (-ρ) de centre O^- crèe :

$\vec{E}^-(M) = \frac{-\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O^-M}$

Donc le champ dû aux deux sphères vaut

$\vec{E}(M) = \vec{E}^-(M) + \vec{E}^+(M) = \frac{-\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O^-M} + \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O^+M} = \frac{-\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O^-O^+}$

Si on pose $\vec{P} = \rho\overrightarrow{O^-O^+}$, on retrouve le résultat de la première partie : $\vec{E}(O) = -\frac{P}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{u_z}$

C'est bien logique car on retrouve l'effet d'une sorte de dipole $\vec{P} = \rho\overrightarrow{O^-O^+}$ correspondant au fait qu'on a ici deux sphères de densité de charge opposée ρ et séparés de O^-O^+ (donc bien une sorte de dipole). Donc la sphère polarisée se comporte en gros comme un dipole unique, ce qui redonne une forme intuitive de ce qu'est la polarisation (une sorte de somme des dipoles élémentaires), donc l'effet est là encore un champ opposé au champ qui l'a engendré.